Лекция 6.
Теория возмущений

Цель. Описать метод возмущений для исследования задач рассеяния

Если вид потенциала взаимодействия сложен, можно применить более простой метод – метод возмущений. Этот метод рассматривает влияние рассеивающего центра как малое возмущение. Выводы теории возмущений справедливы для малых углов рассеяния, т.е. для далеких пролетов, для остальных же углов дают качественное описание процесса рассеяния.

Так как мы рассматриваем упругое рассеяние, то величина импульса сохраняется, меняется лишь направление. Пусть после рассеяния у частицы появляется компонента импульса p_y, тогда для синуса угла рассеяния можно записать:

$$sin\theta = \frac{p_y}{p} \tag{6.1}$$

$$p_y = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{r(t)} F(r(t))dt \tag{6.2}$$

Для нахождения p_y мы должны знать зависимости $r(t)$ и $y(t)$. В приближении теории возмущений можно считать, что частица движется почти по прямой линии, тогда $y \approx b, \quad x \approx v_0 t, \quad r \approx \sqrt{b^2 + {v_0}^2 t^2}$. Подставим эти выражения в (6.2).

$$\frac{p_y}{p} \approx \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{bF(\sqrt{b^2 + (v_0 t)^2})}{\sqrt{b^2 + (v_0 t)^2}} dt \tag{6.3}$$

Сделаем замену переменных $u = {}^{v_0 t}\!/_{b}$ и учтем, что $p = mv_0, \quad E = {}^{mv_0^2}\!/_{2}$.

$$Sin\theta \approx \theta \approx \frac{b}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(b\sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}} du \tag{6.4}$$

Подставим кулоновскую силу $F = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b^2(1+u^2)}$, получим

$$\theta \approx \frac{b}{2E} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b^2} 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1+u^2\right)^{3/2}} du = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{Eb} \tag{6.5}$$

Отсюда из определения дифференциального сечения рассеяния получим

$$\frac{dq}{d\theta} = q(\theta) = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{2\pi (Z_1 Z_2 e^2)^2}{E^2 \theta^3} \tag{6.6}$$

Качественные выводы, справедливые и для формулы Резерфорда, можно сделать на основании (6.6). Сечение рассеяния быстро уменьшается с увеличением скорости налетающей частицы и угла рассеяния и стремится к бесконечности при $\theta \to 0$. Данная расходимость объясняется дальнодействующим характером кулоновского потенциала. В плазме радиус действия сил ограничивается так называемым радиусом экранировки r_{sc}, можно сказать, что при прицельных параметрах, превосходящих этот радиус экранировки, рассеяние практически не происходит. Значит, существует некоторое $\theta_{\min} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{Er_{sc}}$. В классической плазме радиус экранировки равен радиусу Дебая.

Возвращаясь к интегралу (4.8), заметим (и это будет подтверждено результатом), что основной вклад в него будут вносить большие расстояния, где как раз и справедливо приближение далеких пролетов. Пользуясь разложением

$$1-\cos\theta=\frac{1}{2}\theta^2$$

и формулой (6.5), из (4.8) находим

$$\Sigma_{tr}=\frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2 v_0^{\ 4}}\int\frac{db}{b} \tag{6.7}$$

Как видно, написанный интеграл логарифмически расходится на нижнем и верхнем пределах. Расходимость при малых b связана с тем, что здесь нарушается использованное нами приближение далеких пролетов. Этой расходимости не возникло бы, если бы мы пользовались точным выражением (4.10). Исправить положение можно, заменив нижний предел интегрирования в (6.7) на минимальное расстояние $b_{\min}$, при котором еще можно пользоваться нашим приближением. Поскольку интеграл (6.7) зависит от нижнего предела только логарифмически, то точное значение $b_{\min}$ не очень существенно. В качестве $b_{\min}$ можно выбрать то прицельное расстояние, при котором происходит рассеяние на угол порядка $\pi/2$:

$$b_{\min}\sim\frac{Z_1 Z_2 e^2}{m v_0^{\ 2}} \tag{6.8}$$

Расходимость при больших значениях b носит более глубокую причину. Она связана с тем обстоятельством, что кулоновский потенциал слишком медленно убывает с расстоянием. Однако, как мы уже знаем, на самом деле в плазме потенциал заряда экранируется, так что на расстояниях, больших чем дебаевский радиус r_D, поле спадает экспоненциально. Учет этого обстоятельства приводит к тому, что прицельные расстояния, большие r_D, фактически не вносят вклада в (6.7), и поэтому в качестве верхнего предела $b_{\max}$ в интеграле можно взять величину r_D:

$$b_{\max}\sim\left(\frac{T}{4\pi n e^2}\right)^{1/2} \tag{6.9}$$

Точное значение отношения $b_{\max}/b_{\min}$ не очень существенно, поскольку оно входит под знаком логарифма (по этой причине мы не учитывали также, что на самом деле поле заряда в плазме является не кулоновским, а «экранированным кулоном»; учет этого обстоятельства дал бы множитель порядка единицы под знаком логарифма).

Величину

$$\Lambda=\ln\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \tag{6.10}$$

называют кулоновским логарифмом. Важно отметить: под знаком логарифма в (6.10) стоит большое число. Действительно, положим для оценки $v_0^{\ 2}=3T/m$, $Z_1=Z_2=1$, тогда

$$\frac{b_{\max}}{b_{\min}}=\frac{3T^{3/2}}{2\pi^{1/2}e^3 n^{1/2}}\ \sim\ N_D>>1$$

Для плазмы с $T=100\,эВ$, $n=10^{14}см^{-3}$ находим

$$\frac{b_{\max}}{b_{\min}}=1{,}5\cdot10^6,\ \ \Lambda=14{,}3$$

Обычно в качестве Λ берут число $10-15$.

Итак, для величины Σ_{tr} мы получаем выражение

$$\boxed{\Sigma_{tr} = \frac{4\pi\ \Lambda Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2 v_0{}^4}} \qquad (6.11)$$

это сечение падает обратно пропорционально квадрату энергии налетающих частиц $E = m v_0{}^2/2$. Принимая $Z_1 = Z_2 = 1$ и $\Lambda = 15$, получим практическую формулу

$$\Sigma_{tr} \cong \frac{10^{-12}}{E^2\left[эВ\right]} см^2$$

Литература:

1. Биберман Л.М.. Воробьев В.С.. Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982.
2. Митчнер М.. Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир. 1976.
3. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ. 1961.
4. Смирнов Б.М. Физика слабоионизованного газа. М.: Наука, 1978.
5. Мэзон Е., Вандерслайс Дж. Атомные и молекулярные процессы. п.р. Бейтса. М.:Мир, 1964.
6. Месси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновеия. М., 1971.
7. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М.. Квантовая механика. М.: Наука,1974.
8. Смирнов Б.М. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М.: Атомизд., 1968.
9. Эбелинг В., Крефт В., Кремп Д. Теория связанных состояний и ионизационного равновесия в плазме и твердом теле 1979г., с.50-52.